

Planche n° 19. Comparaison des suites en l'infini

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (***)

Déterminer un équivalent le plus simple possible de chacune des suites suivantes quand n tend vers $+\infty$.

1) $\operatorname{Arccos}\left(\frac{n-1}{n}\right)$ 2) $\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{n}\right)$ 3) $\operatorname{ch}(\sqrt{n})$ 4) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 5) $\frac{\ln(n + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^4 + n^2 - 1}}$
6) $(1 + \sqrt{n})^{-\sqrt{n}}$ 7) $\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right)$ 8) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/5} - (\operatorname{Arctan} n)^{3/5}$ 9) $\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$

Exercice n° 2 (**)

Montrer que $\sum_{k=0}^n k! \underset{+\infty}{\sim} n!$.

Exercice n° 3 (***)

1) Soient u et v deux suites réelles strictement positives. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$. Montrer que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$, alors $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$.

2) Application. Trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\sum_{k=1}^n \ln(k)$.

Exercice n° 4 (****)

Soit (u_n) une suite réelle de limite nulle. Montrer que si $u_n + u_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{2n}$, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

A-t-on : si $u_n + u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$?

Exercice n° 5 (***)

Soit u la suite définie par $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1) Montrer que la suite u est strictement positive, décroissante de limite nulle.

2) On admet que si u est une suite de limite nulle, alors, quand n tend vers $+\infty$, $\sin(u_n) \underset{+\infty}{=} u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$.

Déterminer un réel α tel que la suite $v_n = u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ ait une limite réelle non nulle.

En appliquant le lemme de CÉSARO à la suite (v_n) , déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n° 6 (**)

On admet que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{+\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$ où γ est la constante d'EULER.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.